

Последовательное конструирование

1. (a) Представьте 1 как сумму трех различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.
(b) Представьте 1 как сумму четырех различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.
(c) Представьте 0,8 как сумму шести различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.
(d) Как представить 0,8 в виде суммы ста дробей такого вида?
2. (a) Придумайте 3 различных натуральных числа таких, чтобы их сумма делилась на каждое из чисел.
(b) Придумайте 4 таких числа.
(c) Придумайте 10 таких чисел.
3. Как построить последовательность из 10 натуральных чисел, где каждое число при делении на любое из предыдущих даёт в остатке 1?
4. В клетках квадратной таблицы 10×10 ровно 9 нулей и проведена диагональ из левого верхнего угла в правый нижний. Можно переставлять столбцы и строки вместе с их содержимым. Всегда ли можно добиться, чтобы все нули лежали под диагональю?
5. (a) Двое крестьян за выполненную работу получили мешок зерна. Как им без весов разделить это зерно, чтобы каждый из них считал, что ему досталось не менее половины зерна?
(b) Трое крестьян за выполненную работу получили мешок зерна. Как им без весов разделить это зерно, чтобы каждый из них считал, что ему досталось не менее трети зерна?
(c) Как решить аналогичную задачу для n крестьян?

Последовательное конструирование–добавка

1. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит человек. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь человек покинет лестницу.

2. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$, что $\text{н.о.д.}(a_1, a_2) > \text{н.о.д.}(a_2, a_3) > \dots > \text{н.о.д.}(a_{99}, a_{100})$?

3. Докажите, что для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n .

4. В ряд расположили n лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки, горевшие на прошлой минуте, гаснут, а те негоревшие лампочки, которые на прошлой минуте соседствовали ровно с одной горящей лампочкой, загораются. При каких n можно так зажечь некоторые лампочки вначале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка?

5. На доске выписаны числа от 1 до 666. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно заменить любые два числа на их сумму. Игра заканчивается, когда на доске останутся два числа. Петя хочет добиться, чтобы одно из них делилось на другое. Может ли Вася ему помешать?

Последовательное конструирование

1. (a) Представьте 1 как сумму трех различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.
(b) Представьте 1 как сумму четырех различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.
(c) Представьте 0,8 как сумму шести различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.
(d) Как представить 0,8 в виде суммы ста дробей такого вида?
2. (a) Придумайте 3 различных натуральных числа таких, чтобы их сумма делилась на каждое из чисел.
(b) Придумайте 4 таких числа.
(c) Придумайте 10 таких чисел.
3. Как построить последовательность из 10 натуральных чисел, где каждое число при делении на любое из предыдущих даёт в остатке 1?
4. В клетках квадратной таблицы 10×10 ровно 9 нулей и проведена диагональ из левого верхнего угла в правый нижний. Можно переставлять столбцы и строки вместе с их содержимым. Всегда ли можно добиться, чтобы все нули лежали под диагональю?
5. (a) Двое крестьян за выполненную работу получили мешок зерна. Как им без весов разделить это зерно, чтобы каждый из них считал, что ему досталось не менее половины зерна?
(b) Трое крестьян за выполненную работу получили мешок зерна. Как им без весов разделить это зерно, чтобы каждый из них считал, что ему досталось не менее трети зерна?
(c) Как решить аналогичную задачу для n крестьян?

Последовательное конструирование–добавка

1. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит человек. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь человек покинет лестницу.

2. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$, что $\text{н.о.д.}(a_1, a_2) > \text{н.о.д.}(a_2, a_3) > \dots > \text{н.о.д.}(a_{99}, a_{100})$?

3. Докажите, что для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n .

4. В ряд расположили n лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки, горевшие на прошлой минуте, гаснут, а те негоревшие лампочки, которые на прошлой минуте соседствовали ровно с одной горячей лампочкой, загораются. При каких n можно так зажечь некоторые лампочки вначале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка?

5. На доске выписаны числа от 1 до 666. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно заменить любые два числа на их сумму. Игра заканчивается, когда на доске останутся два числа. Петя хочет добиться, чтобы одно из них делилось на другое. Может ли Вася ему помешать?